

Αναλυτική Γεωμετρία.

15/04/19

Κομπιμή και Επιφανείες

2^{ου} βαθμού

Πρόβλημα ①: Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα οπγ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τύπος των ελλείπων $P(x,y)$ που πληρούν την εξίσωση.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

όταν $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

Πρόβλημα ②: Τι πορίζεται στο χώρο $\mathbb{R}^3$ η εξίσωση:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{14}x + 2a_{34}y + a_{34}z^2 + a_{34} = 0$$

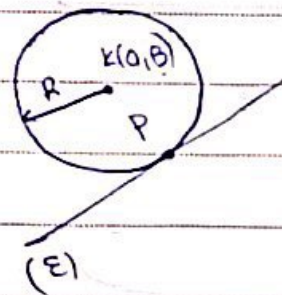
όταν $a_{ij} \in \mathbb{R}$

① Τετραγωνικές καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$

② κύκλος : κύκλος $k(a,b)$ & αυτνας $\mathbb{R}$

κανονική εξίσωση : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

αναλυτική εξίσωση : $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$



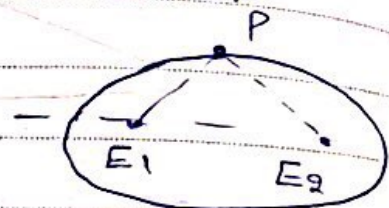
κεντρο $k(-A/2, -B/2)$

κύκλος $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

Εφαπτομένη ευθεία στο έλλειο $P(x_0, y_0)$ δίνεται από την εξίσωση
 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$

② Ελλειψη: με εστίες E_1 & E_2 ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου με την ιδιότητα:

$$d(P, E_1) + d(P, E_2) = \text{σταθ.} = 2a$$



Ας βρούμε την εξίσωση της ελλειψης. Ας θέσουμε $d(E_1, E_2) = 2c$

Παραβλέποντας την γεωμετρία μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα E_1, E_2 βρίσκονται στον οχ άξονα και ότι $E_1(-c, 0)$ & $E_2(c, 0)$

Επομένως αν $P(x, y)$ τυχαίο σημείο της ελλειψης $\Rightarrow$

$$d(P, E_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d(P, E_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Η εξίσωση (*) λαμβάνει την μορφή:

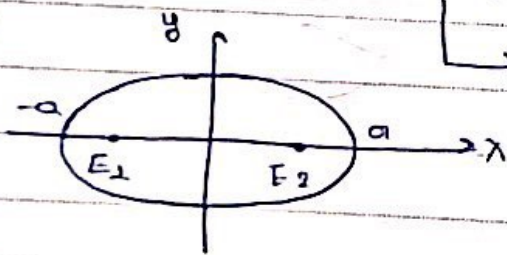
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

αφαιρούμε
τετραγωνίζω

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

όταν $b^2 = a^2 - c^2$



$$y=0 \leadsto x^2 = a^2$$

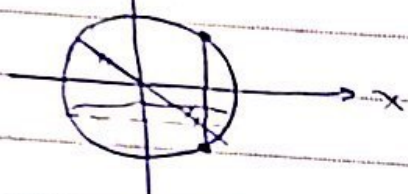
$$x=0 \leadsto y^2 = b^2$$

Το a, b προσδιορίζουν τα σημεία όπου η ελλειψη τέμνει τους άξονες. Για αυτό του λόγο ονομάζονται μεγάλος και μικρός άξονας.

ο αριθμός $e = \frac{c}{a}$ λέγεται εκκεντρότητα της ελλείψης

Ιδιότητες της ελλείψης.

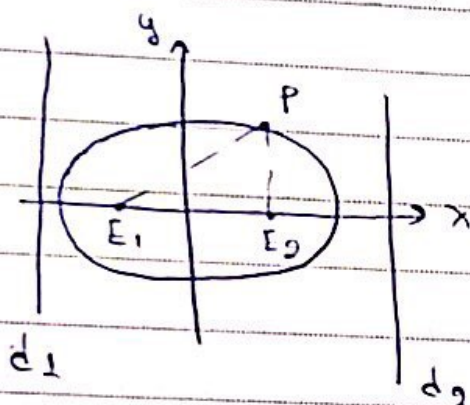
Η ελλείψη είναι συμμετρική ως προς τους άξονες Ox, Oy , και συμμετρική ως προς το O .



Ορίσμος : οι ευθείες $d_1 \& x = -\frac{a^2}{c}$

$$d_2 \& x = +\frac{a^2}{c}$$

λέγονται διευθύνουσες της ελλείψης



Θεώρημα

Για κάθε σημείο της ελλείψης

ισχύει

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} = e$$

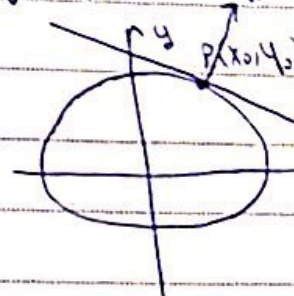
Η εφαπτομένη της ελλείψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

στο τυχαίο σημείο $P(x_0, y_0)$ είναι

η ευθεία με εξίσωση

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

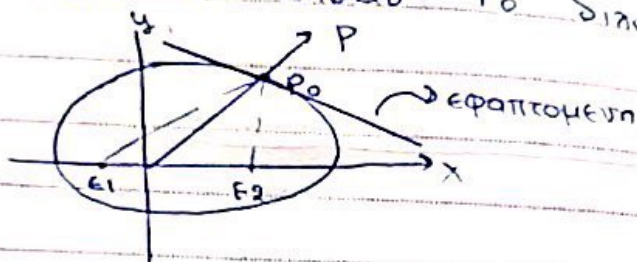


και το διανυσμα

$$\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right) \text{ κάθετο στην εφαπτομένη}$$

Θεώρημα

Η κάθετη ευθεία της ελλείψης στο σημείο P_0 διχοτομεί την γωνία $E_1 P_0 E_2$



③ Υπερβολή

Δίνονται σημεία E_1 & E_2 σε απόσταση $2c > 0$,
σημείο P του επιπέδου με την ιδιότητα

$$|d(E_1, P) - d(E_2, P)| = 2a$$

Λέγεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E_1 και E_2

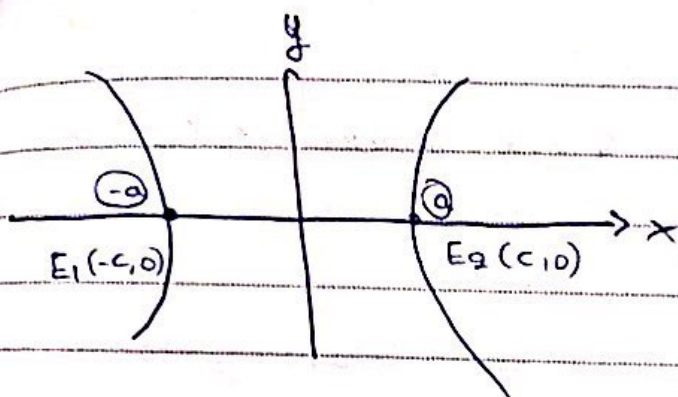
Παρατήρηση

①. Εάν $|a| = c$, τότε ο γεωμετρικός τύπος είναι δύο ημιευθείες



② Από την τριγωνική ανισότητα $|a| < c$

③ Ας υποθέσουμε ότι $|a| < c$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε τα E_1 και E_2 να βρίσκονται στον άξονα Ox και $E_1(-c, 0)$ & $E_2(c, 0)$



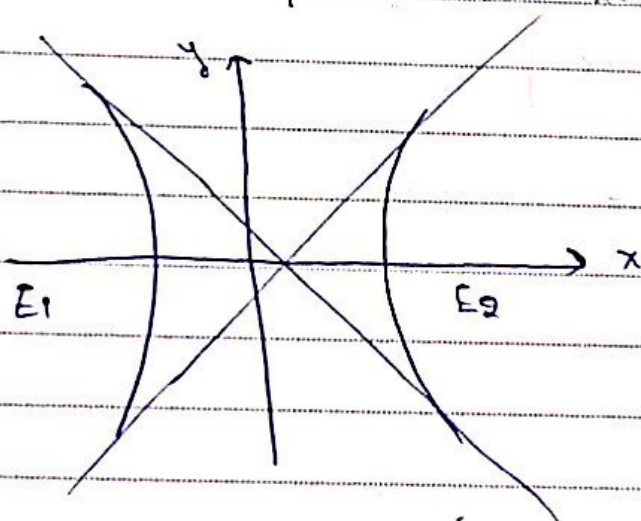
Σ' αυτή την περίπτωση, η εξίσωση
 $|d(P, E_1) - d(P, E_2)| = 2a$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Τα σημεία $A'(-a, 0)$ & $A(a, 0)$ αναφέρονται κοινώς ως υπερβολές

Ιδιότητες

- Η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς τους άξονες και ως προς το κέντρο O του $\mathbb{R}^2$



Οι ευθείες

$$\left| \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \right|$$

και

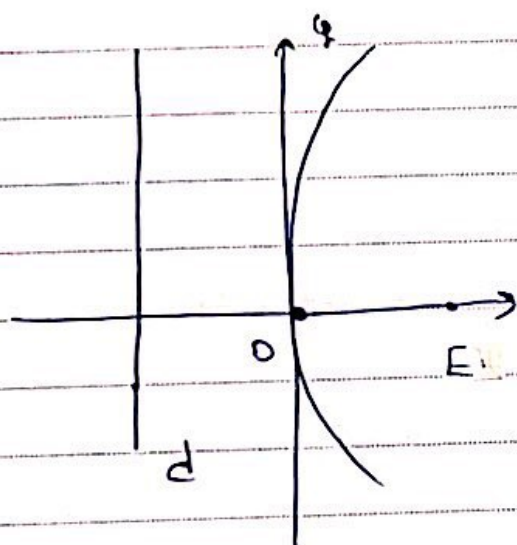
$$\left| \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \right|$$

Λέγονται ασυμπτώτες της υπερβολής

• Η εξίσωση της εφαπτομένης σ' ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ είναι $\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$

④ Παραβολή

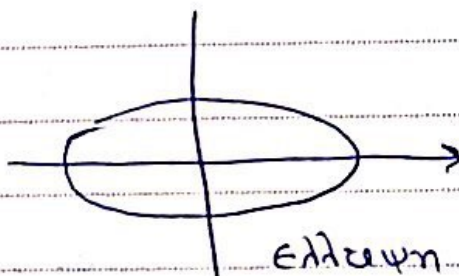
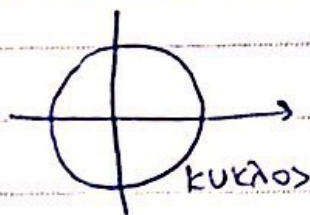
Δίνεται σημείο E και ευθεία d , που δεν περιέχει το E . Ο γεωμ. τόπος των σημείων που έχουν ίση απόσταση από το E και από την ευθεία d λέγεται παραβολή με focus το E και διεύθυνση την ευθεία d .

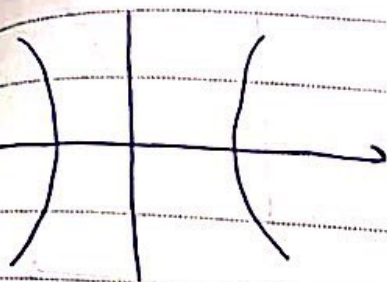


Επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων η εξίσωση της παραβολής είναι $\boxed{y^2 = 2px}$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $P(x_0, y_0)$ είναι $\boxed{yy_0 = p(x+x_0)}$

Συνοψίζοντας



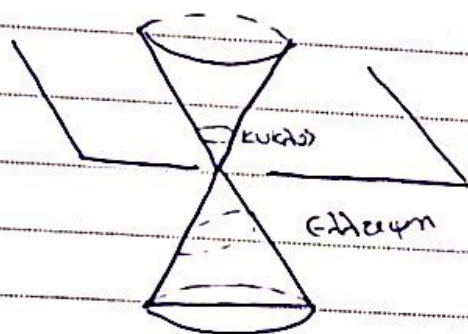


υπερβολή



παραβολή

Οι καμπύλες αυτές λέγονται κωνικές τομές διότι προκύπτουν ως τομή ενός κωνού μ' ένα επίπεδο



Θυμίζουμε ότι θέλουμε να λυθούμε την εξίσωση

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Παραδειγμα:

① Τι παριστάνει η εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$$

Λύση

(Όταν η εξίσωση δεν έχει τον όρο xy , τότε με συμπλήρωση τετραγώνων την αναγούμε σε άλλη μορφή)

Έχουμε:

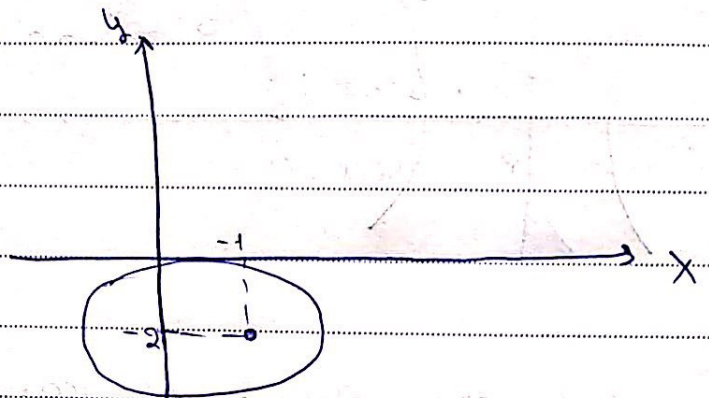
$$0 = x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13$$

$$= x^2 + 2x + 4y^2 + 16y + 13$$

$$\rightarrow \left| \frac{(x+1)^2}{4} + (y+2)^2 = 1 \right|$$

Κανοντας την παρ/λη μεταφορα

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$



τοτε η εξίσωση γίνεται

$$\boxed{\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1} \quad \text{Ελλειψη}$$